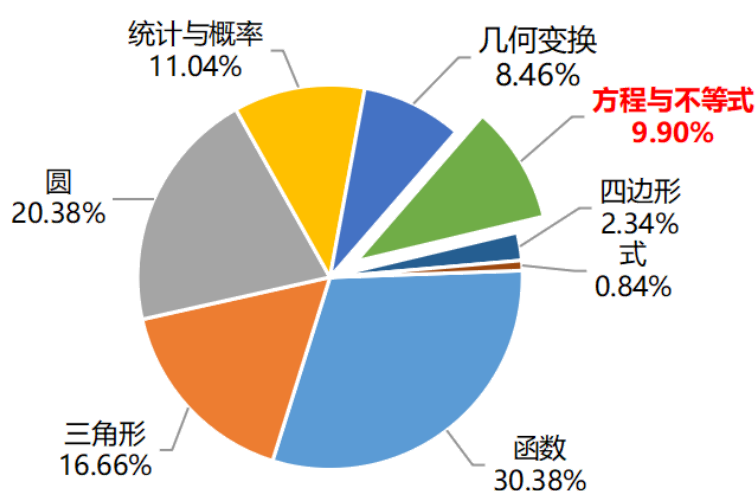


第1讲 一元二次方程的概念及解法

一元二次方程属于人教版教材第二十一章的内容，后续也会与二次函数进行综合。本模块《一元二次方程》，重点包括一元二次方程的解法、根系关系，同时也需要学生在理解概念及解法的基础上，进行实际应用，为后续相关知识的学习奠定基础。

本模块难度适中，适用于基础知识的夯实，本模块为一元二次方程的概念及解法、一元二次方程的判别式和根系关系、一元二次方程的实际应用3讲内容，加油站与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



知识点	难度	考频
一元二次方程的概念	★★	低
一元二次方程的解法	★★	高
一元二次方程的判别式	★★★	高
一元二次方程的根系关系	★★★★	中
一元二次方程的实际应用	★★★★	高

一、一元二次方程的概念

一元二次方程

一元二次方程概念：只含有_____，并且未知数的最高次数是_____的_____方程，叫做一元二次方程。

一元二次方程的一般式：_____，_____为二次项系数；_____为一次项系数，_____为常数项。

一元二次方程的解：使方程左右两边_____的未知数的值就是这个一元二次方程的_____，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的_____。

【备注】1、一元二次方程概念

只含有1个未知数，并且未知数的最高次数是2的整式方程，叫做一元二次方程。

2、一元二次方程的一般式

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ， a 为二次项系数， b 为一次项系数， c 为常数项。

！注意：

①“ $a \neq 0$ ”是一元二次方程的一般形式的重要组成部分。当 $a = 0, b \neq 0$ 时，它就成为一元一次方程。如果明确了 $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元二次方程，就隐含 $a \neq 0$ 这个条件。

②任何一个一元二次方程经过整理都能化成一般形式 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 。在判断一个方程是不是一元二次方程时，要先化成一般形式，再判断。

③二次项系数，一次项系数和常数项都是在一般形式下定义的，所以在确定一元二次方程各项的系数时，应先将方程化为一般形式。

④项的系数包括它前面的符号。如： $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 1 = 0$ 的一次项系数是 -3 ，而不是 3 。

⑤若一元二次方程化为一般形式，没出现一次项 bx ，则 $b = 0$ 。

3、一元二次方程的根

使方程左右两边相等的未知数的值就是这个一元二次方程的解，一元二次方程的解也叫做一元二次方程的根。

举个“栗子”

栗子1

一元二次方程的判别

1. 2016~2017学年天津和平区天津市汇文中学初三上学期末第1题3分 ★

下列关于 x 的方程：① $ax^2 + bx + c = 0$ ；② $3(x-9)^2 - (x+1)^2 = 1$ ；③ $x+3 = \frac{2}{x}$ ；④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ ；⑤ $\sqrt{x+1} = x-1$ ，其中一元二次方程的个数是（ ）。

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【备注】判断一个方程是否是一元二次方程，必须符合以下三个标准：

①一元二次方程是整式方程，即方程的两边都是关于未知数的整式；

- ②一元二次方程是一元方程，即方程中只含有一个未知数；
 ③一元二次方程是二次方程，也就是方程中未知数的最高次数是2.

【答案】 B

【解析】 ①当 $a = 0$ 时， $ax^2 + bx + c = 0$ 是一元一次方程；

② $3(x-9)^2 - (x+1)^2 = 1$ 是一元二次方程；

③ $x + 3 = \frac{2}{x}$ 是分式方程；

④ $(a^2 + a + 1)x^2 - a = 0$ 是一元二次方程；

⑤ $\sqrt{x+1} = x - 1$ 是无理方程.

故选：B.

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

2. 2019~2020学年9月辽宁抚顺新抚区初三上学期月考第1题3分 ★

下列关于 x 的方程是一元二次方程的是 ().

A. $x^2 + 1 = 0$

B. $x + \frac{1}{x} = 1$

C. $ax^2 + bx + c = 0$

D. $(x+1)(x-1) = x^2 + x + 1$

【备注】 判断是否为一元二次方程，一定要先将方程化为一般式

【答案】 A

【解析】 A 选项：是一元二次方程，故本选项符合题

意；

B 选项：不是一元二次方程，故本选项不符

合题意；

C 选项：不是一元二次方程，故本选项不符

合题意；

D 选项：不是一元二次方程，故本选项不符

合题意.

故选 A.

【标注】【知识点】一元二次方程的定义

3. 2015~2016学年天津东丽区初三上学期期中第16题3分 ★★

若一元二次方程 $(m-2)x^2 + 3(m^2+15)x + m^2 - 4 = 0$ 的常数项是0，则 m 的值是 _____ .

【备注】 除满足题中的要求外，一元二次方程一定要强调 $a \neq 0$

【答案】 -2

【解析】 由题意得： $m^2 - 4 = 0$ ，且 $m - 2 \neq 0$ ，

解得： $m = -2$ 。

故答案为： -2 。

【标注】【知识点】一元二次方程的一般形式

栗子2

一元二次方程一般式

4. 2018~2019学年天津蓟县初三上学期期中第1题3分 ★★★

一元二次方程 $4x^2 - 1 = 5x$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别为 ()。

- A. 4, -1, 5 B. 4, -5, -1 C. 4, 5, -1 D. 4, -1, -5

【备注】判断系数时必须要先将方程化为一般式

【答案】 B

【解析】 ∵一元二次方程 $4x^2 - 1 = 5x$ ，

∴整理为： $4x^2 - 5x - 1 = 0$ ，

故一元二次方程的二次项系数、一次项系数、常数项分别为：4, -5, -1。

故选：B。

【标注】【知识点】一元二次方程的一般形式

5. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第13题3分 ★★

一元二次方程 $(x + 1)(3x - 2) = 10$ 的一般形式是 _____。

【备注】利用整式乘除将方程化为一般式

【答案】 $3x^2 + x - 12 = 0$

【解析】 ∵一元二次方程 $(x + 1)(3x - 2) = 10$ 可化为 $3x^2 - 2x + 3x - 2 = 10$ ，

∴化为一元二次方程的一般形式为 $3x^2 + x - 12 = 0$ 。

【标注】【知识点】一元二次方程的一般形式

栗子3

一元二次方程的根

6. 2017~2018学年天津和平区天津市益中学校初三上学期单元测试《一元二次方程》第5题3分 ★★

已知 m, n 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根, 且 $(7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$, 则 a 的值等于 () .

- A. -5 B. 5 C. -9 D. 9

【备注】 已知一元二次方程的根, 可将对应的根代入一元二次方程, 求解出对应参数; 此题需要根据倍数关系进行转化。

【答案】 C

【解析】 $\because m, n$ 是方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根

$$\therefore m^2 - 2m = 1, n^2 - 2n = 1$$

$$\therefore 7m^2 - 14m = 7(m^2 - 2m) = 7, 3n^2 - 6n = 3(n^2 - 2n) = 3$$

$$\therefore (7m^2 - 14m + a)(3n^2 - 6n - 7) = 8$$

$$\therefore (7 + a) \times (-4) = 8$$

$$\therefore a = -9.$$

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

7. 2018~2019学年天津和平区初三上学期期中第11题2分 ★★★

关于 x 的方程 $a(x + m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$ (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$), 则方程 $a(x + m + 2)^2 + b = 0$ 的解是 () .

- A. $x_1 = 0, x_2 = 3$ B. $x_1 = -4, x_2 = -1$
C. $x_1 = -4, x_2 = 2$ D. $x_1 = 4, x_2 = 1$

【备注】 分析两个方程的不同点, 即可得到第二个方程中的 $x + 2$ 就可以看作第一个方程中的 x

【答案】 B

【解析】 $\because$ 关于 x 的方程 $a(x + m)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -2, x_2 = 1$, (a, m, b 均为常数, $a \neq 0$),

$\therefore$ 把 $x + 2$ 当做第一个方程中的 x , 则方程 $a(x + m + 2)^2 + b = 0$ 可变形为

$$a[(x + 2) + m]^2 + b = 0$$

则 $x + 2 = -2$ 或 $x + 2 = 1$,

解得 $x_1 = -2 - 2 = -4, x_2 = 1 - 2 = -1$.

$\therefore$ 方程 $a(x + m + 2)^2 + b = 0$ 的解是 $x_1 = -4, x_2 = -1$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程的解求参数的值

8. 初三上学期单元测试《一元二次方程》一元二次方程的概念和解法第23题 ★★

已知方程 $(x-a)(x-3)=0$ 和方程 $x^2-2x-3=0$ 的解相同，则 $a=$ _____ .

【备注】 先将方程整理为一般式，然后利用“——”对应的原则令前后系数相等求解

【答案】 -1

【解析】 解方程 $x^2-2x-3=0$ 得 $x_1=3$, $x_2=-1$,

方程 $(x-a)(x-3)=0$ 为 $x_1=a$, $x_2=3$.

$\therefore$ 方程 $(x-a)(x-3)=0$ 和方程 $x^2-2x-3=0$ 的解相同，

$\therefore a=-1$.

【标注】 【知识点】 由一元二次方程的解求参数的值

独步天下

9. 2017~2018学年10月天津河东区天津市第三十二中学初三上学期月考第18题3分 ★★★

已知 a 是方程 $x^2-2013x+1=0$ 的一个根，代数式 $a^2-2012a+\frac{2013}{a^2+1}$ 的值为 _____ .

【备注】 考察一元二次方程的根，已知一元二次方程的根，可将对应的根代入一元二次方程。先利用降幂的思想，将整个代数式进行化简，然后计算

【答案】 2012

【解析】 $\because a$ 是方程 $x^2-2013x+1=0$ 的一个根，

$$\therefore a^2-2013a+1=0,$$

$$\therefore a^2-2012a+\frac{2013}{a^2+1}$$

$$=a-1+\frac{2013}{2013a}$$

$$=a+\frac{1}{a}-1$$

$$=\frac{1+a^2}{a}-1$$

$$=\frac{2013a}{a}-1$$

$$=2013-1=2012.$$

【标注】 【知识点】 利用根求代数式的值

二、一元二次方程的解法

1. 直接开方法

一般地，对于方程 $x^2=p$

当 $p > 0$ 时, 根据平方根的意义, 方程有两个 **不等** 的实数根 $x_1 = -\sqrt{p}$, $x_2 = \sqrt{p}$;

当 $p = 0$ 时, 方程有两个 **相等** 的实数根 $x_1 = x_2 = 0$;

当 $p < 0$ 时, 因为对任意实数 x , 都有 $x^2 \geq 0$, 所以方程 **无实数根** .

【备注】 ! 注意 :

①当 $p > 0$ 时, 注意有**正负**两个结果 .

②直接开平方法适用范围 :

方程能转化为 $x^2 = p$, $(mx + n)^2 = p$ 或 $(mx + n)^2 = (px + q)^2$ 的形式

对于 $(mx + n)^2 = (px + q)^2$, 可得到 $mx + n = \pm (px + q)$

采用直接开平方法解一元二次方程的理论依据是**平方根**的定义 .

 举个“栗子”

 栗子4

10. ★★

关于 x 的一元二次方程 $(x - k)^2 + k = 0$, 当 $k > 0$ 时的解为 () .

A. $k + \sqrt{k}$

B. $k - \sqrt{k}$

C. $k \pm \sqrt{k}$

D. 无实数根

【备注】 直接开方法求解要先分析右侧数的正负, 然后再计算

【答案】 D

【解析】 原方程变形得 $(x - k)^2 = -k$,

$\because k > 0$,

$\therefore -k < 0$,

而 $(x - k)^2 \geq 0$, 故原方程无实数根

【标注】 【知识点】 直接开平方法求一元二次方程的根

11. 2017~2018学年10月天津和平区天津市汇文中学初三上学期月考第19.1题 ★★

解方程: $x^2 - 49 = 0$.

【备注】 利用平方根的定义解方程

【答案】 $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

【解析】 移项得 $x^2 = 49$,

解得 $x_1 = 7$, $x_2 = -7$.

【标注】 【知识点】 直接开平方法求一元二次方程的根

12. 2018~2019学年10月天津和平区天津市第一中学初三上学期月考第19题16分 ★★

解下列方程

$$4(x+1)^2 = 25.$$

【备注】 要注意得到 $x+1 = \pm \frac{5}{2}$ 后，要分别计算两个值，不能算出一个后就直接正负这个数

【答案】 (1) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$.

【解析】 (1) $4(x+1)^2 = 25$
 $(x+1)^2 = \frac{25}{4}$,
 $x+1 = \pm \frac{5}{2}$,
 $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$.

【标注】 【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

【方法】配方法

13. 2020~2021学年10月天津和平区天津市第二十一中学初三上学期月考第19题8分 ★★

解方程 .

$$(x+1)^2 = (1-2x)^2.$$

【备注】 利用 $a^2 = b^2 \Rightarrow a = \pm b$ 求解

【答案】 (1) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

【解析】 (1) $(x+1)^2 = (1-2x)^2$,
 开方得： $x+1 = 1-2x$ 或 $x+1 = -(1-2x)$,
 解得： $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

【标注】 【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

2. 配方法

知识回顾：

1. 完全平方公式： $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

2. 试填空： $x^2 + 6x + 9 = (x + \underline{\quad})^2$, $x^2 - 4x + \underline{\quad} = (x - 2)^2$.

解方程： $5x^2 = 6x + 8$.

解题步骤：

①移项：把方程中含有未知数的项移到方程的 左 边，常数项移到方程的 右 边；

②二次项系数化为 1：根据等式的性质把二次项的系数化为“1”；

③配方：把方程两边都加上一 次项系数的一半的平方，使左边配成一个完全平方；

④开平方：运用 直接开平方法 解方程 .

①移项，得_____，

②二次项系数化为1：_____，

③配方，得_____，

④开方，得_____，
解得_____ .

【备注】 ①移项，得 $5x^2 - 6x = 8$ ，

②二次项系数化为1： $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{8}{5}$ ，

③配方，得 $x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{25} = \frac{8}{5} + \frac{9}{25}$ ，即 $\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{8}{5}$ ，

④开方，得 $x - \frac{3}{5} = \pm \frac{7}{5}$ ，

解得 $x_1 = 2$ ， $x_2 = -\frac{4}{5}$.

！ 总结：

如果一个一元二次方程的二次项系数为1，为了把方程中的二次项和一次项配凑成一个完全平方公式，我们只需要在式子后面加上“**一次项系数的一半的平方**”即可 .

$$x^2 \pm mx + \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \left(x \pm \frac{m}{2}\right)^2$$

 举个“栗子”

 栗子5

14. 2018~2019学年天津河东区天津市第七中学初三上学期期中（第三学片）第19题12分 ★★★

解关于 x 的方程 .

$$x^2 - 6x - 2 = 0 . \text{ (用配方法)}$$

【备注】 直接配方

【答案】 (1) $x_1 = 3 + \sqrt{11}$ ， $x_2 = 3 - \sqrt{11}$.

【解析】 (1) $x^2 - 6x - 2 = 0$

$$x^2 - 6x = 2$$

$$x^2 - 6x + 9 = 11$$

$$\text{即 } (x-3)^2 = 11$$

$$x-3 = \pm\sqrt{11}$$

$$x_1 = 3 + \sqrt{11}, x_2 = 3 - \sqrt{11}.$$

【标注】【知识点】直接开平方法求一元二次方程的根

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【能力】运算能力

15. 2017~2018学年天津滨海新区初二下学期期末第20题8分 ★★

解下列方程：

$$x^2 + 3 = 2\sqrt{3}x.$$

【备注】先移项，然后直接配方

【答案】(1) $x_1 = x_2 = \sqrt{3}.$

【解析】(1) 移项得： $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0,$

$$\text{配方得：} (x - \sqrt{3})^2 = 0,$$

$$\text{开方得：} x - \sqrt{3} = 0,$$

$$\text{即 } x_1 = x_2 = \sqrt{3}.$$

$$\text{故答案为：} x_1 = x_2 = \sqrt{3}.$$

【标注】【方法】配方法

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【能力】运算能力

16. 2016~2017学年3月天津和平区天津市第一中学初三下学期月考第19.1题4分 ★★

用配方法解方程： $3x^2 - 3 = 2x.$

【备注】注意要将二次项系数化为"1"后然后再配方

【答案】 $x_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3},$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

【解析】 $3x^2 - 2x - 3 = 0,$

$$x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0,$$

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9},$$

$$x - \frac{1}{3} = \pm \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$\therefore x_1 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3},$$

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

【标注】【能力】运算能力

【知识点】配方法求一元二次方程的根

3. 公式法

一元二次方程的求根公式是由配方法演变而来：

用配方法解方程： $ax^2 + bx + c = 0$ (a 、 b 、 c 为常数且 $a \neq 0$)

解：移项，得 $ax^2 + bx = -c$

二次项系数化为1，得 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

配方，得 $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ ①

因为 $a \neq 0$ ，所以 $4a^2 > 0$ 。式子 $b^2 - 4ac$ 的值有以下三种情况：

(1) $b^2 - 4ac > 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ ，由①得 $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

方程有两个不等的实数根 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ， $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(2) $b^2 - 4ac = 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ ，由①可知方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

(2) $b^2 - 4ac = 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ ，由①可知方程有两个相等的实数根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

(3) $b^2 - 4ac < 0$ ，

这时 $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} < 0$ ，即 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ ，

而 x 取任何实数都不能使 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ 。因此方程 无实数根。

！ 总结

1. 式子 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 根的判别式，通常用希腊字母“ Δ ”表示它，即_____。

2. 当 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时，方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的实数根可写为

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 的形式，这个式子叫做一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的 求根公式。

【备注】用公式法解一元二次方程的步骤：

① 将一元二次方程整理成一般式；

② 确定公式中的 a , b , c 的值；

③ 求出 $b^2 - 4ac$ 的值；

④ 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时，代入求根公式，解得 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ；

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 无解。

一般习惯上说一元二次方程的根有两个，分两个相等的实数根，或两个不相等的实数根。

所以当 $\Delta \geq 0$ 时，我们说方程有两个实数根

🍎 举个“栗”子

栗子6

17. 2016~2017学年天津和平区天津市第二十中学初三上学期期末模拟第20题4分 ★★★

解方程： $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 。

【备注】 利用公式法解方程，要先判断判别式的正负，再利用求根公式计算

【答案】 $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$.

【解析】 方法一： $2x^2 - 3x - 1 = 0$.

$$a = 2, b = -3, c = -1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 17 > 0,$$

∴ 方程有两个不相等的实数根，

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$\therefore x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}.$$

方法二： $2x^2 - 3x - 1 = 0$,

$$2x^2 - 3x = 1,$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2},$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16},$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4},$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}.$$

【标注】 【知识点】公式法求一元二次方程的根

18. 2014~2015学年天津和平区初三上学期期中 ★★★

解下列方程：

$$4x^2 - 3x = x + 1.$$

【备注】利用公式法解方程时，要先移项将方程变为一般式，然后判断判别式的正负，再利用求根公式计算

【答案】 (1) $x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

【解析】 (1) 方程化为 $4x^2 - 4x - 1 = 0$, $a = 4$, $b = -4$, $c = -1$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 32 > 0,$$

方程有两个不相等实数根，

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{32}}{2 \times 4} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2},$$

$$\text{即 } x_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

4. 因式分解法

解一元二次方程时，先 **因式分解**，使方程化为两个一次式的乘积等于 0 的形式，再使这两个一次式分别等于 0，从而实现 **降次**，这种解一元二次方程的方法叫做 **因式分解法**。

因式分解法的根据：如果两个因式的乘积等于 0，那么这两个因式 **至少有一个** 为 0，反过来，如果两个因式中有一个因式为 0，那么它们之积为 0，即 $ab = 0$ ，则 **$a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $a = b = 0$**

例如： $(2x-1)(3-x) = 0$ ，则 **$2x-1=0$ 或 $3-x=0$** ，从而可得到方程的解。

！ 总结

(1) 解一元二次方程的 **思想方法**：**降次**

(2) 因式分解法的一般 **步骤**：

- ①将方程化为一元二次方程的一般形式；
- ②把方程的左边分解为两个 **一次因式的积**；
- ③令每个因式为 **0**，得到两个一元一次方程；
- ④解这两个一元一次方程得原方程的解。

【备注】因式分解常用方法：①提公因式法

②乘法公式法

③十字相乘方法

④分组分解法

！ 注意

因式分解法解方程时，同样也要先将方程化为一般式。当等式两侧同时含有相同的因式时，不可以直接约掉。

19. 2018~2019学年天津河西区初三上学期期中第7题3分 ★★

方程 $x^2 - 4x - 12 = 0$ 的解为 () .

A. $x_1 = 2, x_2 = 6$

B. $x_1 = 2, x_2 = -6$

C. $x_1 = -2, x_2 = 6$

D. $x_1 = -2, x_2 = -6$

【备注】直接将方程左侧十字相乘法因式分解

【答案】C

【解析】 $x^2 - 4x - 12 = 0$,

$$(x + 2)(x - 6) = 0 ,$$

$$\therefore x_1 = -2, x_2 = 6 .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

20. 2019~2020学年9月天津和平区天津市九十中学初三上学期月考第19题12分 ★★

解下列方程：

(1) $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

(2) $3(x - 5)^2 = 2(5 - x)$.

【备注】(1) 中直接利用十字相乘法因式分解

(2) 中先移项，然后利用提取公因式法因式分解

【答案】(1) $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$.

(2) $x_1 = 5, x_2 = \frac{13}{3}$.

【解析】(1) $3x^2 + 2x - 1 = 0$,

$$(x + 1)(3x - 1) = 0 ,$$

$$x + 1 = 0 \text{ 或 } 3x - 1 = 0 ,$$

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3} .$$

(2) $3(x - 5)^2 = 2(5 - x)$,

$$3(5 - x)^2 - 2(5 - x) = 0 ,$$

$$(5 - x)[3(5 - x) - 2] = 0 ,$$

$$5 - x = 0 \text{ 或 } 3(5 - x) - 2 = 0 ,$$

$$x_1 = 5, x_2 = \frac{13}{3} .$$

【标注】【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

21. 2019~2020学年9月天津和平区天津市兴南中学初三上学期月考（南开中学）第19题6分 ★★

解方程．

(1) $(x-1)(x+3)=12$.

(2) $(x-3)^2+4x(x-3)=0$.

【备注】 (1) 中先将方程化为一般式，然后十字相乘法因式分解

(2) 中利用提取公因式法因式分解

【答案】 (1) $x_1 = -5$, $x_2 = 3$.

(2) $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{5}$.

【解析】 (1) $(x-1)(x+3)=12$,

$$x^2 + 2x - 3 = 12 ,$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 ,$$

$$(x+5)(x-3) = 0 ,$$

$$x_1 = -5 , x_2 = 3 .$$

(2) $(x-3)^2+4x(x-3)=0$,

$$(x-3)(x-3+4x) = 0 ,$$

$$(x-3)(5x-3) = 0 ,$$

$$x_1 = 3 , x_2 = \frac{3}{5} .$$

【标注】 【知识点】 因式分解法求一元二次方程的根

22. 2017~2018学年9月天津和平区天津市第二南开中学初三上学期月考第19题12分 ★★★

解下列一元二次方程．

(1) $x(2x-5)=4x-10$.

(2) $(x-4)^2=9(5-2x)^2$.

【备注】 (1) 中先将方程转化为一般式，然后十字相乘法因式分解

(2) 中利用乘法公式的平方差公式因式分解

【答案】 (1) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{5}{2}$.

(2) $x_1 = \frac{11}{5}$, $x_2 = \frac{19}{7}$.

【解析】 (1) $x(2x-5)=4x-10$

$$2x^2 - 5x = 4x - 10$$

$$2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$(x-2)(2x-5) = 0$$

$$\therefore x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{2}.$$

$$(2) (x-4)^2 = 9(5-2x)^2$$

$$(x-4)^2 - 9(5-2x)^2 = 0$$

$$(x-4+15-6x)(x-4-15+6x) = 0$$

$$(-5x+11)(7x-19) = 0,$$

$$\therefore x_1 = \frac{11}{5}, x_2 = \frac{19}{7}.$$

【标注】【知识点】公式法求一元二次方程的根

【知识点】配方法求一元二次方程的根

【知识点】因式分解法求一元二次方程的根

【知识点】公式法解一元二次方程的一般步骤

【能力】运算能力